**Facoltà di Ingegneria – Università degli Studi di Bologna**

***Dipartimento di Ingegneria Industriale***

**Marco Gentilini**

# Comportamento termico di recipienti e serbatoi in regime permanente e transitorio.

Quaderni del Dipartimento

**MARCO GENTILINI**

# *COMPORTAMENTO TERMICO DI RECIPIENTI E SERBATOI IN REGIME PERMANENTE E TRANSITORIO.*

## *1 – PREMESSA.*

Le utenze termiche comprendono numerosi recipienti e serbatoi di accumulo e alimentazione di fluidi che devono essere mantenuti a temperatura superiore a quella ambiente e che subiscono transitori durante le diverse fasi di esercizio.
Per ottenere un sensibile controllo della temperatura di funzionamento risulta quindi necessario valutarne il comportamento in funzione dei parametri di progetto e utilizzo.

## *2 – DETERMINAZIONE E CONTROLLO DELLA TEMPERATURA DEI SERBATOI.*

Per un contenitore di fluido, (**Fig.1**), la potenza termica scambiata con l'ambiente esterno, vale:

$$Q = (T - T_e)\sum_{i=1}^{n} \frac{S_i}{R_{ti}} = \frac{(T - T_e)}{R_{to}} S,$$

con: $T$ temperatura del fluido contenuto nel recipiente;
$T_e$ temperatura dell'ambiente esterno;
$S_i$ porzione di superficie di trasmissione a resistenza termica globale $R_{ti}$;

$S = \sum_{i=1}^{n} S_i$, superficie totale di frontiera;

$R_{to} = \dfrac{\sum_{i=1}^{n} S_i}{\sum_{i=1}^{n} \frac{S_i}{R_{ti}}} = \dfrac{S}{\sum_{i=1}^{n} \frac{S_i}{R_{ti}}}$, resistenza termica globale media del serbatoio.

Trascurando la capacità termica della struttura del serbatoio la stessa potenza termica, vale: $Q = - d_s V c_p dT/dt$, con: $d_s$, $V$, $c_p$, densità, volume e calore specifico del liquido contenuto nel recipiente.

Si ottiene, quindi: $$(T - T_e)\frac{S}{R_{to}} = -d_s V c_p \frac{dT}{dt},$$

da cui: $$-\frac{dT}{T - T_e} = \frac{S}{R_{to} d_s V c_p} dt,$$

e quindi integrando: $$\ln\frac{T_o - T_e}{T - T_e} = \frac{S}{R_{to} d_s V c_p} t,$$

ovvero: $T(t) = T_e + (T_o - T_e)e^{-\frac{S}{R_{to} d_s V c_p}t}$, essendo: $T_o = T(0)$, la temperatura del liquido all'istante iniziale di riferimento, $(t = 0)$.

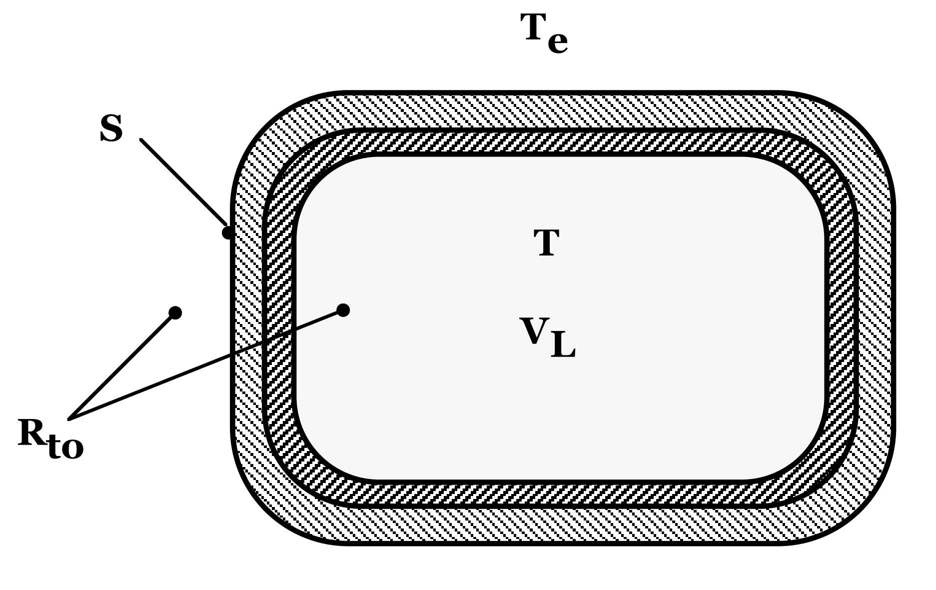

**Fig. 1**

Indicando con $t_f$, l'intervallo di tempo di permanenza del fluido nel serbatoio, con $T_f = T(t_f)$, la temperatura finale a partire dalle condizioni iniziali, $(T_o)$, note le condizioni geometriche del serbatoio, $(S, V)$ e quelle ambientali, $(T_e)$, imposte due delle tre variabili, $(T_f, t_f, R_{to})$, che compaiono nella relazione, è possibile risalire alla rimanente, ovvero determinare la temperatura finale, $(T_f)$, o il tempo necessario, $(t_f)$, a raggiungerne un determinato valore, o infine, il grado di isolamento richiesto, $(R_{to})$, per soddisfare le specifiche imposte:

$$T_f = T_e + (T_o - T_e)e^{-\frac{S}{R_{to}d_sVc_p}t_f};$$

$$t_f = \frac{R_{to}d_sVc_p}{S}\ln\frac{T_o - T_e}{T_f - T_e};$$

$$R_{to} = \frac{S}{d_sVc_p\ln\frac{T_o - T_e}{T_f - T_e}}t_f.$$

Le grandezze $t_f$ e $R_{to}$ mantengono comunque significato fisico, (reali e positive), in quanto risultando la temperatura finale compresa fra quella iniziale, ($T_o$), e quella ambiente, ($T_e$), le differenze: $T_o - T_e$ e $T_f - T_e$ assumono in ogni caso lo stesso segno e risulta: $T_o - T_e > T_f - T_e$.

Nel caso in cui il serbatoio sia attraversato da una portata **G** di liquido, con temperatura $T_i$ in ingresso, (**Fig.2**), l'equazione di bilancio risulta:

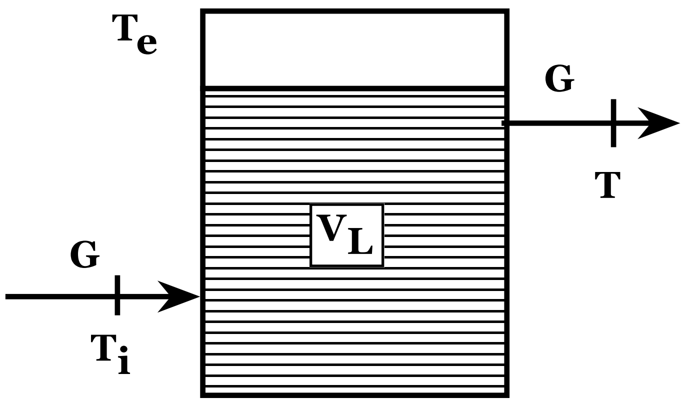


**Fig. 2**

$$Gc_pT_i - (T - T_e)S/R_{to} - Gc_pT = d_sVc_pdT/dt,$$

la cui soluzione è pari alla somma di quella dell'omogenea associata:

$$T\,(S/R_{to} + Gc_p) + d_sVc_pdT/dt = 0,$$

più un integrale particolare che può ottenersi ponendo: $dT/dt = 0$, con condizioni iniziali: $T(0) = T_o$;

$$\left(\frac{dT}{dt}\right)_{t=0} = \frac{(T_i - T_o)G}{d_sV} - \frac{(T_o - T_e)S}{R_{to}d_sVc_p}.$$

Si ottiene:

$$T(t) = \left( T_o - \frac{Gc_pT_i + \frac{S}{R_{to}}T_e}{Gc_p + \frac{S}{R_{to}}} \right) e^{-\frac{Gc_p + \frac{S}{R_{to}}}{d_sVc_p}t} + \frac{Gc_pT_i + \frac{S}{R_{to}}T_e}{Gc_p + \frac{S}{R_{to}}},$$

da cui la temperatura di regime, ($\mathbf{T_r}$): $T_r = \frac{Gc_pT_i + \frac{S}{R_{to}}T_e}{Gc_p + \frac{S}{R_{to}}}$, alla quale la temperatura del fluido **T(t)**, tende asintoticamente, dalle condizioni iniziali, con andamento monotono.

Pertanto note le condizioni geometriche del serbatoio, (**S**), e quelle ambientali, ($\mathbf{T_e}$, $\mathbf{T_i}$), imposte due delle tre variabili, ($\mathbf{T_r}$, **G**, $\mathbf{R_{to}}$), che compaiono nella relazione, è possibile risalire alla rimanente, ovvero determinare la temperatura $\mathbf{T_r}$ di regime, o la portata **G** necessaria a imporre la temperatura stessa, o il grado di isolamento richiesto, ($\mathbf{R_{to}}$), all'ottenimento delle condizioni imposte:

$$T_r = \frac{Gc_pT_i + \frac{S}{R_{to}}T_e}{Gc_p + \frac{S}{R_{to}}}; \; G = \frac{S}{c_pR_{to}}\frac{T_e - T_r}{T_r - T_i}; \; R_{to} = \frac{S}{Gc_p}\frac{T_e - T_r}{T_r - T_i}.$$

La portata, (**G**), e la resistenza termica media, ($\mathbf{R_{to}}$), mantengono comunque significato fisico, (positive).

La temperatura di regime $\mathbf{T_r}$ infatti, risulta intermedia fra le temperature $\mathbf{T_e}$ e $\mathbf{T_i}$, essendone la media pesata, per cui le differenze: $\mathbf{T_e - T_i}$ e $\mathbf{T_r - T_i}$, assumono in ogni caso lo stesso segno.

## *3 – SISTEMI TERMICI INTERMITTENTI. ANALISI DEI CONSUMI ENERGETICI DURANTE LE FASI DI ARRESTO.*

I regimi di funzionamento dei sistemi raramente sono continui, ma più spesso risultano cicli in cui a periodi esercizio seguono periodi di arresto.

In caso di utenze termiche i corpi a temperatura superiore a quella ambiente durante la fermata possono essere lasciati allo spontaneo transitorio di raffreddamento e successivamente riscaldati fino alla temperatura di utilizzo, o viceversa mantenuti alla temperatura di esercizio con diverse soluzioni impiantistiche.

A meno di particolare esigenze tecnologiche, in ogni caso occorre eseguire una preventiva analisi energetica atta a valutare la spesa energetica nei diversi casi.

Qualora un serbatoio, (o un qualunque corpo), di massa **m** e calore specifico medio $\mathbf{c_p}$, che in regime di funzionamento deve essere mantenuto a una temperatura $\mathbf{T_r}$ maggiore di quella ambiente, ($\mathbf{T_e}$), rimanga inutilizzato per un periodo di tempo $\mathbf{t_o}$, per mantenerlo alla temperatura di regime occorre un dispendio di energia termica pari a: $Q_{dc} = \frac{S}{R_{to}}(T_r - T_e)t_o$, essendo $\mathbf{S}$ e $\mathbf{R_{to}}$ la superficie totale di frontiera e la resistenza termica totale del corpo, rispettivamente.
Qualora il serbatoio venga, invece, lasciato raffreddare e successivamente riscaldato fino alla temperatora di utilizzo, l'energia termica dispersa nel transitorio risulta:

$$Q_{di} = \int_o^{t_o} [T_f(t) - T_e]dt = mc_p(T_r - T_1) + \int_{t_1}^{t_o} [T_f(t) - T_e]dt,$$

con $\mathbf{t_1}$ e $\mathbf{T_1}$ istante di inizio riscaldamento e corrispondente temperatura cui è giunto il serbatoio: $T_1 = T_f(t_1)$.

L'equazione di bilancio nel transitorio di raffreddamento risulta:

$$\frac{S}{R_{to}}[T_f(t) - T_e] = -mc_p \frac{dT}{dt},$$

da cui:

$$T_f(t) = (T_r - T_e)e^{-\frac{S}{R_{to}mc_p}t} + T_e.$$

Indicando con **Q** la potenza termica di riscaldamento, l'equazione di bilancio del relativo transitorio risulta:

$$Q = \frac{S}{R_{to}}[T_r(t) - T_e] + mc_p \frac{dT}{dt},$$

da cui, essendo imposto che sia: $T_r(t) = T_r$, per $t = t_o$, si ottiene:

$$T_r(t) = \left[(T_r - T_e) - Q\frac{R_{to}}{S}\right]e^{-\frac{S}{R_{to}mc_p}(t-t_o)} + Q\frac{R_{to}}{S} + T_e.$$

L'istante di inzio riscaldamento si ottiene quindi come radice, ($\mathbf{t_1}$), dell'equazione: $T_f(t) = T_r(t)$, ovvero:

$$(T_r - T_e)e^{-\frac{S}{R_{to}mc_p}t_1} + T_e =$$

$$= \left[ (T_r - T_e) - Q \frac{R_{to}}{S} \right] e^{-\frac{S}{R_{to} m c_p}(t_1 - t_o)} + Q \frac{R_{to}}{S} + T_e,$$

da cui:

$$t_1 = \frac{R_{to} m c_p}{S} \ln \left[ \frac{S}{Q R_{to}} (T_r - T_e) \left( 1 - e^{\frac{S t_o}{R_{to} m c_p}} \right) + e^{\frac{S t_o}{R_{to} m c_p}} \right].$$

Posto: $Q = f_a \frac{S}{R_{to}} (T_r - T_e)$, (con $f_a > 1$, affinchè il riscaldamento porti il serbatoio a temperatura di regime in un tempo finito), si ottiene:

$$t_1 = \frac{R_{to} m c_p}{S} \ln \left( \frac{1}{f_a} + \frac{f_a - 1}{f_a} e^{\frac{S}{R_{to} m c_p} t_o} \right).$$

La temperatura di fine raffreddamento e inizio riscaldamento vale quindi: $T_1 = T(t_1) = \frac{T_r - T_e}{\frac{1}{f_a} + \frac{f_a - 1}{f_a} e^{\frac{S}{R_{to} m c_p} t_o}} + T_e$.

E' immediato verificare che per $f_a \varnothing$ **oo**, (potenza di riscaldamento illimitata), tende a zero il periodo di riscaldamento e il tempo $t_1$ tende a quello totale di interruzione, ($t_o$).

Si ottiene, pertanto:

$$Q_{di} = m c_p \left( T_r - \frac{T_r - T_e}{\frac{1}{f_a} + \frac{f_a - 1}{f_a} e^{\frac{S}{R_{to} m c_p} t_o}} + T_e \right) +$$

$$+\int_{\frac{R_{to}mc_p}{S}\ln\left(\frac{1}{f_a}+\frac{f_a-1}{f_a}e^{\frac{S}{R_{to}mc_p}t_o}\right)}^{t_o}\left\{\left[(T_r-T_e)-Q\frac{R_{to}}{S}\right]e^{-\frac{S}{R_{to}mc_p}(t-t_o)}+\right.$$

$$\left.+Q\frac{R_t}{S}+T_e\right\}dt.$$

In realtà tenuto conto che la fase di impiego di energia esterna è il solo periodo di riscaldamento a potenza costante, ($Q$), si ha:

$$Q_{di}=Q(t_o-t_1)=f_a\frac{S}{R_{to}}(T_r-T_e)(t_o-t_1)=$$

$$=f_a\frac{S}{R_{to}}(T_r-T_e)\left[t_o-\frac{R_{to}mc_p}{S}\ln\left(\frac{1}{f_a}+\frac{f_a-1}{f_a}e^{\frac{S}{R_{to}mc_p}t_o}\right)\right].$$

Per $f_a \varnothing$ **oo**, il limite, (che assume forma indeterminata), può essere valutato considerando che per: $t_1 = t_o$, non si hanno disperdimenti alle pareti durante il riscaldamento, ma solo il contributo della variazione di temperatura, per cui risulta: $Q_{di} = mc_p[T_r - T(t_o)]$,

ovvero: $$Q_{di}=mc_p(T_r-T_e)\left(1-e^{-\frac{St_o}{R_{to}mc_p}}\right).$$

Il rapporto fra l'energia spesa in caso di interruzione e funzionamento continuo, rispettivamente risulta quindi:

$$\frac{Q_{di}}{Q_{dc}}=f_a\left[1-\frac{R_{to}mc_p}{St_o}\ln\left(\frac{1}{f_a}+\frac{f_a-1}{f_a}e^{\frac{S}{R_{to}mc_p}t_o}\right)\right].$$

Per lo studio della funzione si ha: $\lim\limits_{f_a\to 1}\frac{Q_{di}}{Q_{dc}}=1$;

$$\lim_{f_a\to oo}\frac{Q_{di}}{Q_{dc}}=\frac{R_{to}mc_p}{St_o}\left(1-e^{-\frac{St_o}{R_{to}mc_p}}\right)<1\ \forall\ \ St_o/R_{to}mc_p;$$

$$\frac{d\,\dfrac{Q_{di}}{Q_{dc}}(f_a)}{df_a} =$$

$$= 1 - \frac{R_{to}mc_p}{St_o}\left\{ \ln\left[\frac{1}{f_a} + \left(1 - \frac{1}{f_a}\right)e^{\frac{St_o}{R_{to}mc_p}}\right] + \frac{e^{\frac{St_o}{R_{to}mc_p}} - 1}{1 + (f_a - 1)e^{\frac{St_o}{R_{to}mc_p}}} \right\},$$

che dal valore: $1 - \dfrac{R_{to}mc_p}{St_o}\left(e^{\frac{St_o}{R_{to}mc_p}} - 1\right) < 1, \ \forall\, St_o/R_{to}mc_p$,

per $f_a = 1$, tende asintoticamente a zero per $f_a \to \infty$.

Si conclude quindi che la curva: $Q_{di}/Q_{dc}$ risulta monotona decrescente dal valore unitario al valore limite per: $f_a \to \infty$ e il funzionamento intermittente risulta quindi energeticamente conveniente per qualunque valore dei parametri.

**********